

Exponentielles Wachstum und Zerfall

(© S. Riedmann)

Aufgabe (1)

Ein Wald hatte 1990 einen Bestand von 33.000 m³ Holz. Im Laufe von 20 Jahren wurde kein Holz gefällt, so dass sich der Bestand von 1970 um 70% vermehren konnte.

- Stellen Sie für diesen Waldbestand das Wachstumsgesetz auf, wenn exponentielles Wachstum vorausgesetzt wird:
- Wie groß war der Bestand 1980 und wie groß würde er im Jahr 2000 sein?
- Wann würde sich der Holzbestand von 1970 verdreifacht haben.

Aufgabe 2: Die jüngsten Statistiken ergeben bezüglich der Anzahl aller in Österreich lebenden, mit dem Aids-Virus infizierten Personen folgendes Bild:

1982.....2500 Infizierte

1992.....10000 Infizierte

Die Anzahl A jener Personen, welche aufgrund ihres Verhaltens oder persönlicher Umstände ein hohes Ansteckungsrisiko tragen, ist $A=200'000$ Personen (=“Risikogruppe“).

- Mit wie viel Infizierten müsste man nach $t=20$ bzw. 30, 50, 100 Jahren (ab 1992) rechnen, sofern man dem Anwachsen exponentielles Wachstum zugrunde legt? Für welchen Zeitpunkt kann man erwarten, dass alle zur Risikogruppe gehörenden Personen angesteckt sind?
- Verwendet man die Formel $g(t) = \frac{A}{1+79 \cdot e^{-0.1425 \cdot t}}$ ($g(t)$...Anzahl der Infizierten, t anlog zu oben). Wie viele Infizierte kann man dann zu denselben Zeitpunkten erwarten?
- Nehmen wir an, ab dem Jahre 1992 würde die zu erwartende Anzahl der Infizierten am besten mit Hilfe folgender Funktionsgleichung beschrieben werden können:

$$h(t) = -5 \cdot t^3 + 150 \cdot t^2 \quad (h(t)\dots\text{Anzahl der infizierten, } t \geq 10)$$

- Für welchen Zeitpunkt sind am meisten und wie viel Infizierte?
 - Für welchen Zeitpunkt sind keine Infizierte zu erwarten?
- Skizziere Verlaufskurven für diese Funktionen und gib „außermathematische Interpretationen bezüglich deren Verlauf.

Aufgabe (3)

Die Halbwertszeit von Cäsium ¹³⁷CS beträgt 29.7 Jahre.

- Wann ist die beim Reaktorunfall von Tschernobyl verursachte Cäsiumbelastung auf 10% ihres Anfangswertes zurückgegangen?
- Auf wie viel Prozent ist die Belastung seit dem Reaktorunfall 1985 bis heute (12 Jahre später) zurückgegangen?
- Veranschaulichen Sie die Zerfallskurve graphisch für die ersten 100 Jahre.

Aufgabe (4)

Nach Schätzungen aus dem Jahr 1994 beliefen sich die Reserven des Rohstoffes Nickel auf 51 Millionen Tonnen.

Der Verbrauch betrug 1994 0.8 Millionen Tonnen. Außerdem wird die jährliche Zuwachsrate des Verbrauchs auf 2.9% geschätzt.

- Erstelle das Gesetz für den Nickelverbrauch und gib die Wachstumskonstante λ an.
- In wie viel Jahren wird sich der jährliche Verbrauch verdoppelt haben?
- Stelle den verbliebenen Nickelvorrat in einem geeigneten Koordinatensystem graphisch dar.
- Wann ist der gesamte Nickelvorrat aufgebraucht?

Aufgabe (5)

Mittels der ^{14}C -Methode ist es möglich, das Alter von Fossilien und Lebewesen zu bestimmen. Dieses Isotop zerfällt mit einer Halbwertszeit von etwa 5730 Jahren.

- Bei Ötzi, dem Mann vom Hauslabjoch, wurde damit ein Alter von etwa 5000 Jahren festgestellt. Welcher ^{14}C -Anteil (in %) wurde daher gemessen?
- Bis zu welchem Alter lässt sich diese Methode verwenden, wenn man noch 1% des ursprünglichen Gehaltes mit hinreichender Genauigkeit feststellen kann?

Aufgabe (6)

Infolge der chemischen Schädlingsbekämpfung mittels DDT (Dichlordiphenyltrichlorethan) ist dieses Gift über die Nahrungskette auch in die Kuhmilch gelangt. Eine Konzentration von 0.05 ppm (parts per million = 10^{-4} %) wird zwar noch toleriert, jedoch ist es wünschenswert, diese Toleranzgrenze auf 0.02 ppm zu senken. Das kann nicht von heute auf morgen geschehen. Erst in etwa 30 Jahren hat sich die Hälfte des vorhandenen Giftstoffes chemisch zersetzt. Wie lange dauert es voraussichtlich, bis die angestrebte Grenze von 0.02 ppm erreicht wird, wenn ab jetzt kein DDT mehr verwendet wird und 0.05 ppm vorhanden sind?

Bemerkung: DDT wird im Fettkörper des menschlichen Organismus gespeichert. Bei dessen Abbau (Gewichtsverlust) können die Blutwerte von DDT gefährlich hoch werden.