2. Beispiel Radioaktiver Zerfall

In einer Menge des radioaktiven Isotops Plutonium ^{243}Pu sind nach 3 Stunden bereits 34% der vorhandenen Kerne zerfallen.

a) Geben Sie das Zerfallsgesetz in der Form $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ sowie in der Form $N(t)= N_0 \cdot a^t$ an.

$N(t) = N_0 a^t$: Aus dem Text geht hervor, dass $N(3) = 66\%\ von\ N_0 = 0.66 \cdot N_0$
Somit gilt:

$$t = 3$$
$$N(3) = 0.66 \cdot N_0$$

Dies setzen wir ein in die Gleichung:

$$0.66 \cdot N_0 = N_0 a^3 \quad | : N_0$$
$$0.66 = a^3$$
$$a = 0.87$$

Nun berechnen wir noch λ (=Lambda)
Es gilt $a = e^{-\lambda}$

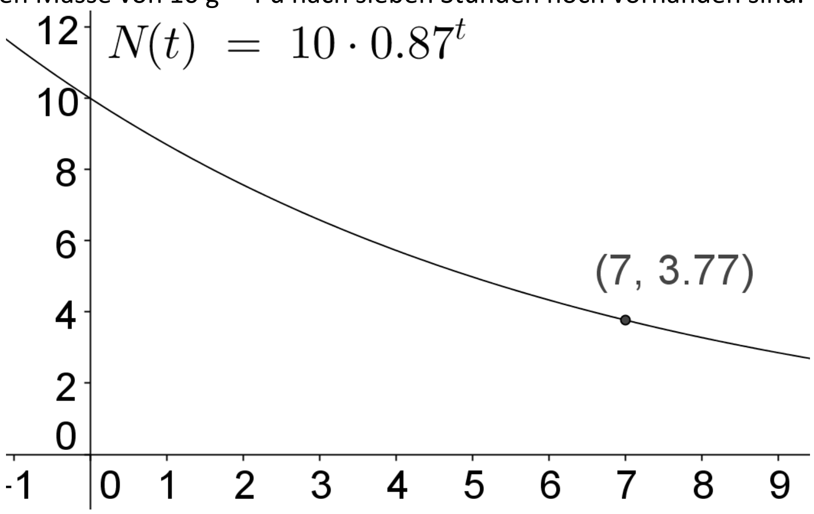
$$0.87 = e^{-\lambda} \quad | \ln()$$
$$\ln(0.87) = -\lambda \cdot \ln(e) \quad | \ln(e) = 1$$
$$\ln(0.87) = -\lambda$$
$$\lambda = 0.139$$

a) Berechnen Sie die Halbwertszeit τ und begründen Sie, warum die Halbwertszeit von der Anfangsmenge unabhängig ist.

Es gilt: $N(t) = \frac{N_0}{2}$

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot 0.87^t$$
$$\frac{1}{2} = 0.87^t \quad | \log$$
$$t = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log(0.87)}$$
$$t = 5$$

b) Skizzieren Sie die Funktion und interpretieren Sie anhand der Grafik, wie viel von der anfänglichen Masse von 10 g ^{234}Pu nach sieben Stunden noch vorhanden sind.



Nach 7 Stunden sind noch ca. 3,8g da.

d) Argumentieren Sie, wann das Element komplett verstrahlt sein wird. **-> theoretisch nie, da die Funktion nie die x-Achse schneidet. In der Realität dann, wenn nur mehr ein Atom da ist und dieses zerfällt.**

3. Beispiel: Alkomat

Klaus ist bei Freunden eingeladen. Er trinkt um 19 Uhr 1/4 Liter Wein und misst mittels Alkomat einen Alkoholspiegel von 0,7‰. Um 22.42 ist die Hälfte seines Alkoholspiegels abgebaut.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung auf, die den Abbau des Alkohols beschreibt.

Da es sich um eine exponentielle Abnahme handelt gilt:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

Zusätzlich wissen wir, dass $N_0 = 0{,}7‰$ (Promille) und, weil um 22:42 (also nach 3h42min=3.7h) nur noch die Hälfte da ist, gilt

$$N(3.7) = \frac{0{,}7}{2} = 0{,}35$$

Setzen wir das in die Formel ein, so können wir a berechnen:

$$0.35 = 0.7 \cdot a^{3.7}$$
$$a = 0.83$$

Somit gilt: $N(t) = 0.7 \cdot 0.83^t$

b) Erklären Sie, um welche Funktion es sich handelt und beschreiben Sie die Eigenschaften dieser Funktion.

Es handelt sich um eine Exponentialfunktion / Exponentielle Abnahme.

Eigenschaften: In gleichen Zeitintervallen vermindert sich die Größe immer um **denselben Faktor**. Die Funktion schneidet bei N_0 die y-Achse, ist monoton fallend und schneidet die x-Achse niemals.

c) Um 24 Uhr trinkt er noch 3/8 Liter Wein. Geben Sie den Alkoholspiegel um 3 Uhr an. Argumentieren Sie, ab welcher Uhrzeit er mit seinem Auto nach Hause fahren darf. Der erlaubte Promillegehalt ist 0,5‰.

Zuerst berechnen wir, welchen Alkoholspiegel Klaus um 24 Uhr noch hat, bevor er die 3/8 trinkt.

$N(5) = 0.7 \cdot 0.83^5 = 0.28$ ‰

Somit hat er um 24 Uhr noch 0.28‰

Nun nimmt er 3/8 zu sich. Von der Angabe ganz oben wissen wir, dass er nach ¼ insgesamt 0.7‰ hat, wie viel kommen also mit 3/8 hinzu (Schlussrechnung)

$$\frac{1}{4} \quad - \quad 0.7‰$$
$$\frac{3}{8} \quad - \quad x‰$$

$$x = \frac{\frac{3}{8} \cdot 0.7}{\frac{1}{4}} = \frac{12 \cdot 0.7}{8} = \frac{3 \cdot 0.7}{2} = 1.05‰$$

Somit kommen also zu den noch vorhandenen 0.28‰ noch 1.05‰ hinzu, wodurch Klaus um 24 Uhr, nach den 3/8 insgesamt 1.05+0.28=1.33‰ hat.

Der Alkoholspiegel um 3 Uhr beträgt dann: $N(3) = 1.33 \cdot 0.83^3$

$N(3) = 0.76$ Promille

Nun berechnen wir, wann (=für welches t) er nur noch 0.05‰=N(t) hat

$$0.5 = 1.33 \cdot 0.83^t$$
$$t = 5.25$$

Nach ca. 5 Stunden 15min (d.h. um 5:15 Uhr) hat Klaus nur mehr 0.5‰.