Aufgaben zu den verschiedenen Wachstumsmodellen

1. Beispiel: Spezialdünger
Durch den Einsatz von Spezialdünger kann der Ertrag von Feldfrüchten verbessert werden.
Erträge können aber nicht grenzenlos gesteigert werden, sondern es gibt für jede Frucht pro ha eine spezifische Obergrenze K. Wir nehmen an, dass die Obergrenze für eine Feldfrucht 6 t pro ha betrage.
Ein Landwirt stellt fest, dass er ohne Spezialdünger einen Ertrag von 3 t pro ha erwarten kann. Setzt er hingegen 30 kg Spezialdünger ein, dann kann der Ertrag auf 5 t pro ha gesteigert werden.
Der funktionale Zusammenhang zwischen dem Spezialdüngereinsatz und dem Ertrag wird angegeben mit:

$$N(x) = \frac{K}{1 + c \cdot a^x}$$

N … Ertrag Tonnen pro Hektar (t/ha)
x … Menge des eingesetzten Düngers in kg/ha angeben.

a) Mittels dieser Informationen sind c und a zu berechnen.
b) Der Graph der Funktion ist darzustellen und zu interpretieren.
c) Wie weit würdest du den Düngereinsatz für günstig empfinden? (offene Frage)
d) Ab welcher Menge würdest du nicht mehr erhöhen? Begründe deine Meinung!
c) Bei welcher Düngermenge sind 90% der spezifischen Obergrenze erreicht?

2. Beispiel: Grippe
In einer Stadt sei die Anzahl N der Menschen, die bei einer Grippeepidemie nach t Tagen infiziert sind, näherungsweise durch $N(t) = \frac{10000}{1 + 9999 \cdot e^{-t}}$ angegeben.
a) Zeichne den Graphen der Funktion N und gib die Art der Monotonie an!
b) Mit welchem Wachstumsmodell wird hier gearbeitet? Begründe! Berechne N_0!
c) Wie viel Menschen sind nach 10 Tagen infiziert?
d) Nach wie vielen Tagen sind i) 200, ii) 500, iii) 1000 Menschen infiziert?
e) Welcher Wert wird nicht überschritten?

3. Aufgabe:
Ein Patient nimmt 6 mg eines Medikamentes in Tablettenform zu sich. Im Körper werden im Laufe eines Tages 35% des Medikamentes abgebaut.
a) Bestimme das Zerfallsgesetz, wenn exponentielle Abnahme angenommen wird (t in Stunden).

b) Das Zerfallsgesetz lautet $y(t) = c \cdot 0{,}98^t$ t in Stunden. Berechne die Halbwertszeit.

c) Dokumentiere, wie man die Zeit t (in Stunden) für die Einnahme der nächsten Tablette berechnen kann, wenn die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes nicht unter z mg fallen sollte und das Zerfallsgesetz $y(t) = 7 \cdot 0{,}95^t$ lautet.

4) Während der Fahrt mit einem Auto erwärmt sich die Kühlflüssigkeit durch die Wärme des Motors. Beim Abstellen eines Motors kühlt sich diese dann wieder nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz

$$T(t) = -10 + 65 \cdot e^{-k \cdot t}$$

ab. (t in **Minuten**; T in °C)

a) Bestimme die Konstante k, wenn die Kühlflüssigkeit nach einer **Stunde** noch 12 °C hat. (1)

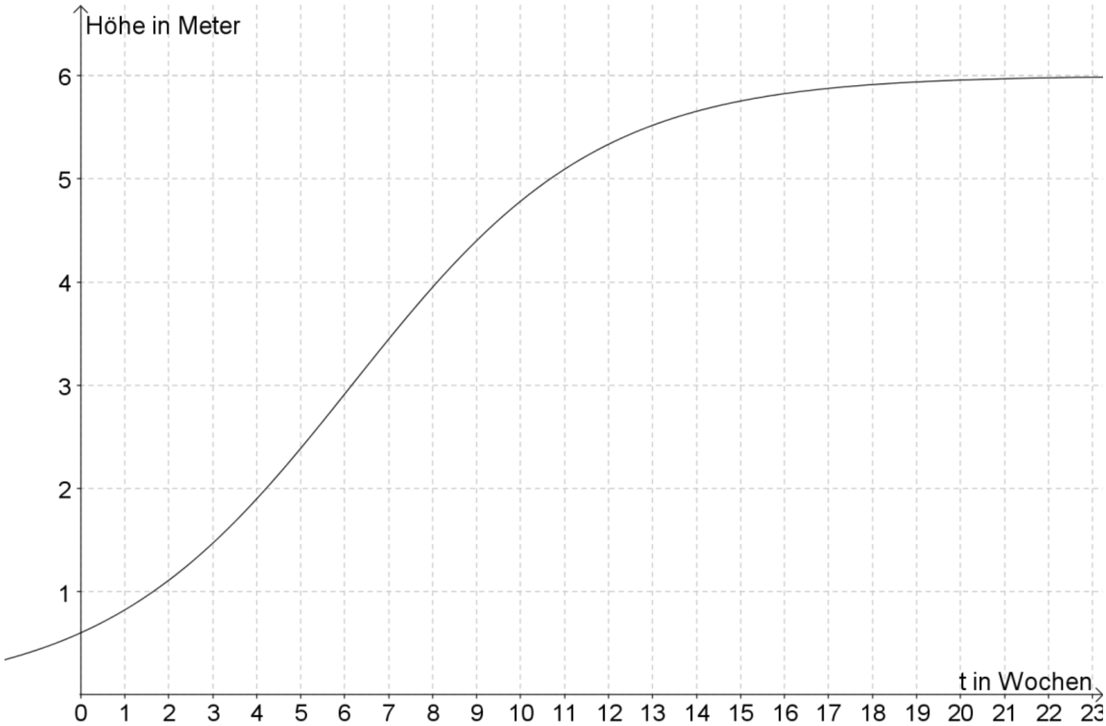
b) Stelle den Abkühlvorgang für die ersten 3 **Stunden** grafisch dar. (Verwende k = 0,018) (2)

c) Bestimme die Temperatur der Kühlflüssigkeit beim Abstellen des Motors. (1)

d) Bestimme die Umgebungstemperatur. (1)

e) Erkläre, was mit dem Ausdruck T(60) – T(30) berechnet wird. (1)

5) Das Höhenwachstum von Hopfen wird in folgender Grafik veranschaulicht:



a) Bestimme die Höhe des Hopfens nach 16 Wochen. (1)

b) Ermittle aus der Grafik, wie lange der Hopfen braucht um von 2 auf 3 m zu wachsen. (1)

c) Begründe, ob der Hopfen nach 6 Wochen oder nach 14 Wochen schneller wächst. (1)

6) Der Kupferverbrauch steigt weltweit. Waren es 1960 noch schätzungsweise 4,5 Mio. Tonnen die verbraucht wurden, waren es im Jahre 2010 bereits 18 Mio. Tonnen.

a) Bestimme eine Gleichung mit der der Kupferverbrauch in einem Jahr berechnet werden kann (t = 0 ist das Jahr 1960), wenn lineares Wachstum angenommen wird. (2)

b) Bestimme eine Gleichung mit der der Kupferverbrauch in einem Jahr berechnet werden kann (t = 0 ist das Jahr 1960), wenn exponentielles Wachstum angenommen wird. (2)

c) Experten schätzen dass sich der weltweite Kupferverbrauch nach folgender Formel entwickeln wird: (2)
$V(t) = 1{,}8 \cdot 10^7 \cdot 1{,}029^t$ t=0 ist das Jahr 2010; V … Verbrauch in Tonnen
Berechne den Verbrauch von China im Jahre 2025, wenn Schätzungen davon ausgehen, dass China im Jahre 2025 40 % des weltweit erzeugten Kupfers verbraucht.

7) Einem Patienten wird per Tropfinfusion ein Medikament ins Blut geleitet. Von der im Blut vorhandenen Menge wird ein Teil über die Nieren wieder ausgeschieden.
Die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes kann durch die Formel
$B(t) = 125 - 120 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$ t in Minuten; B in mg
berechnet werden.

a) Stelle die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes für die nächsten 2 Stunden grafisch dar. (2)

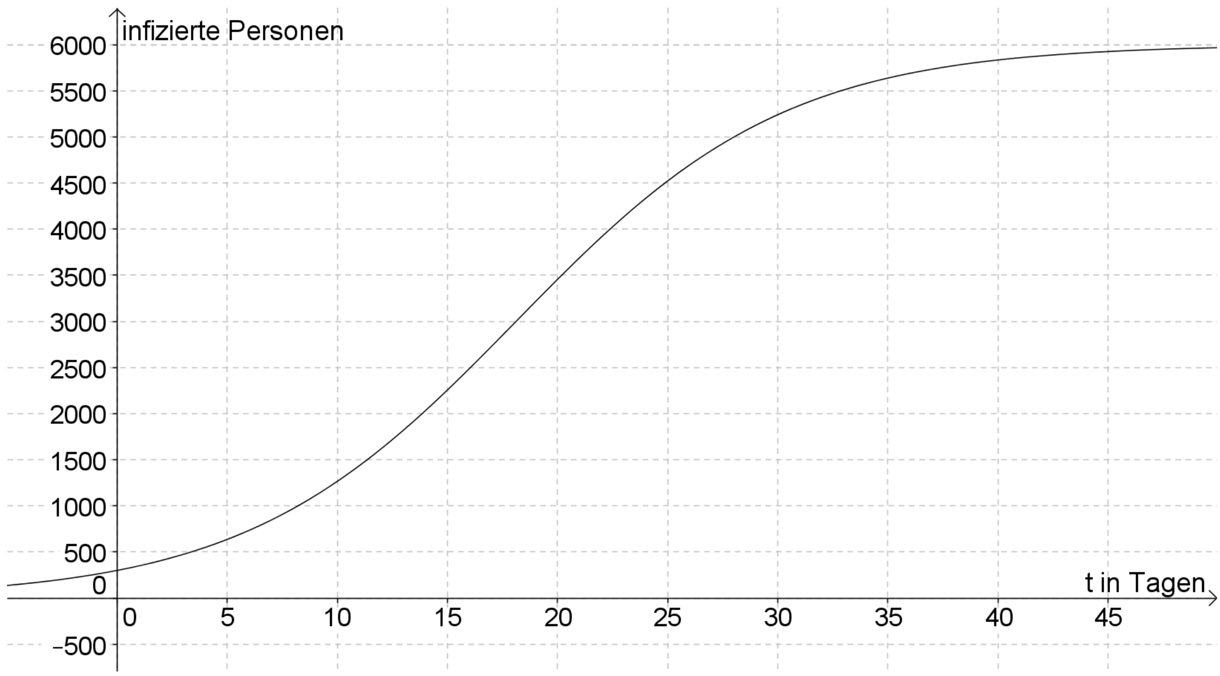
b) Interpretiere die Grafik in Bezug auf das verwendete Wachstumsmodell. (1)

c) Gib die Sättigungsmenge an. (1)

d) Berechne, nach wie viel Minuten (auf Minuten genau) sich 110 mg des Medikamentes im Blut befinden. (1)

e) Erkläre, was mit dem Ausdruck B(35) berechnet wird. (1)

8) Die Ausbreitung einer Grippe in einer Stadt wird in folgender Grafik dargestellt:



a) Ermittle aus der Grafik, nach welcher Zeit die Hälfte der Personen der Risikogruppe der Stadt erkrankt sind. (2)
Erkläre, welche Bedeutung dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit hat.

b) Bestimme die Zahl der Personen, die sich zwischen dem 10. Und 15. Tag infizieren. (1)

Lösungen

1. Aufgabe:

a) Lösungsansatz: Es ist K = 6, N(0) = 3, N(30) = 5 (vom Text herauslesen!!)

c = 1, a = 0,947765727

b) streng monoton steigend

Wendepunkt auf der y-Achse. Im Bereich R_0^+ ist der Graphenverlauf degressiv. Die Funktion strebt gegen einen Höchstwert. Dieser ist K = 6 t pro ha.

2. Aufgabe: a) streng monoton steigend.

charakteristischer Graph für logistisches Wachstum

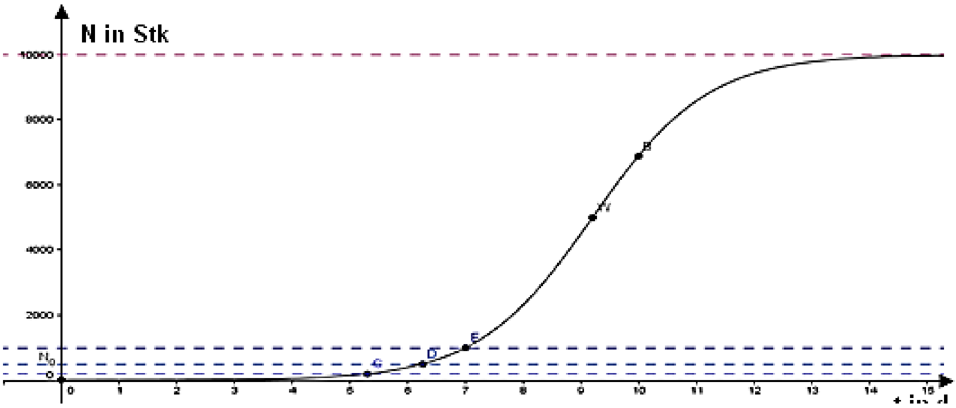
b) logistisches Wachstum wegen der Darstellung

$$N(t) = \frac{K}{1 + c \cdot e^{\lambda \cdot t}}$$

$N_0 = 1$

c) ca. 6878 Menschen.

d) i) nach 5,3 Tagen ii) nach 6,3 Tagen iii) nach 7 Tagen



Lösungsansatz i): $200 = \frac{10000}{1 + 9999 \cdot e^{-t}}$ daraus: t = – ln 0,00490049 = 5,318 ≈ 5,3

e) Der Höchstwert K = 10 000 wird nicht überschritten. Siehe Graphik oder Berechne N(10000000…)

2. Aufgabe:

a) *c* = 1 (degressiv in R^+) *a* = 0,947765727 *exakt*: *a* ist die 30ste Wurzel aus 0,2

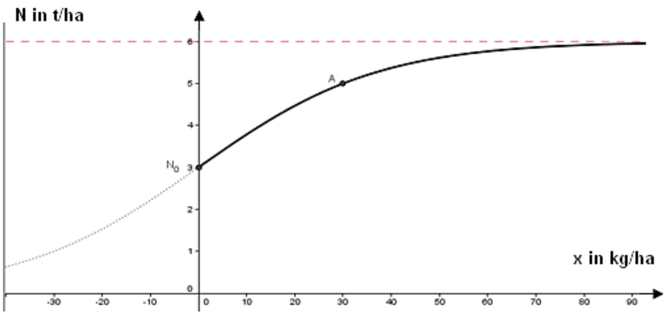
Lösungsansatz: Es ist K = 6, N(0) = 3, N(30) = 5 (vom Text herauslesen, dann einsetzen!!)

b) streng monoton steigend

Wendepunkt *auf* der 2.Achse. Im Bereich R_0^+ ist der Graphenverlauf *degressiv*. Die Funktion strebt gegen einen Höchstwert. Dieser ist K = 6 t pro ha.

c) Kommt drauf an, was der Dünger kostet und um wie viel man die Frucht verkaufen kann.

d) Für x-Werte, deren N-Werte nahe bei K sind. Also ab ca. 40 kg/ha vielleicht.



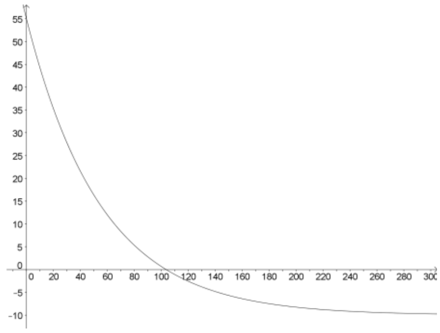
3. Lösungen:

a) $y(t) = 6 \cdot 0{,}9822^t$; b) ca. 34 Stunden; c) Wir setzen für y(t) = z ein, dividieren dann durch 7, berechnen davon den Logarithmus und dividieren dieses Ergebnis durch den Logarithmus von 0,95.

4. Lösungen

a) k = 0,018056; b) siehe Grafik c) T(0) = 55 °C;

d) Umgebungstemperatur: -10 °C, e) Die Temperaturabkühlung in °C zwischen der 30. und 60. Minute.



5. Lösungen

a) ca. 5,8 m b) ca. 2 Wochen c) nach 6 Wochen (Kurve ist steiler)

6. Aufgabe

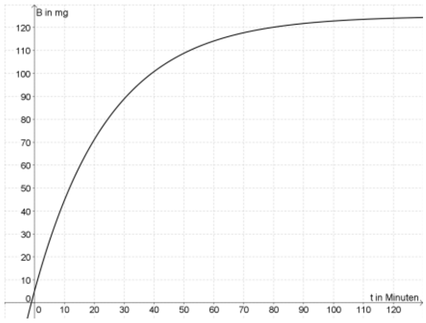
a) $V(t) = 0{,}27t + 4{,}5$ t in Jahren; V in Mio. Tonnen; b) $V(t) = 4{,}5 \cdot 1{,}028^{t}$;

c) Weltverbrauch: $V(2025) = 2{,}76 \cdot 10^{7}$ Tonnen; Verbrauch China: $V(2025) = 1{,}1 \cdot 10^{7}$ Tonnen

7. Aufgabe

a) siehe Grafik b) beschränktes Wachstum; c) 125 mg; d) 52 Minuten;

e) die nach 35 Minuten im Blut vorhandene Menge des Medikamentes



8. Aufgabe

a) nach ca. 18 Tagen; die Ausbreitung verlangsamt sich; b) ca. 1.000 Personen