Rechnen mit Funktionen – welche 7 Punkte ich können muss

1. y ist gegeben -> x-Werte (Stellen, Argumente) gesucht[1]

a) rechnerisch (umformen oder Solve-Befehl, zero, intersect, bei Quadratischen Gleichungen: Quadkom) oder

b) mithilfe des Graphen (ablesen)

2. x ist gegeben -> y (Funktionswerte, f(x)) gesucht

a) rechnerisch (für x einen Wert einsetzen) oder

b) graphisch (auch: value-Befehl)

3. (x|y) gegeben -> Funktionsgleichung bestimmen können[2] (Umkehraufgaben/Regression) mit

a) gegebenem Text (hier müssen die Punkte herausgelesen werden)

b) gegebener Graphik (hier müssen immer so viele Punkte markiert werden, wie es unbekannte in der Funktionsgleichung gibt)

c) gegebener Tabelle (hier sind die Punkte bereits in der (Werte-)Tabelle gegeben).

4. Graphen zeichnen können (Geogebra oder Y=, Wertetabelle, Window anpassen, GRAPH)

5. Aus einem Graphen Werte und Eigenschaften herauslesen können (Steigung, Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Halbierungszeit, …)

6. Werte/Koeffizienten/Parameter einer Funktion im Sachzusammenhang interpretieren können[3] (Steigung, Anfangswert, …)

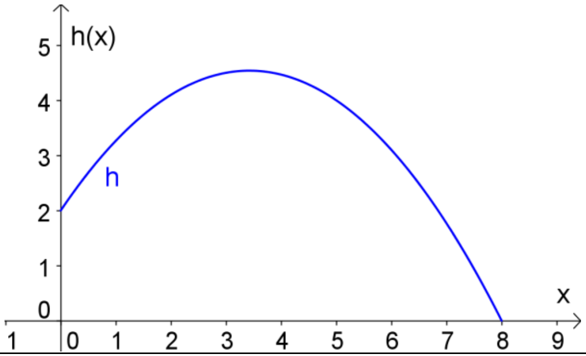
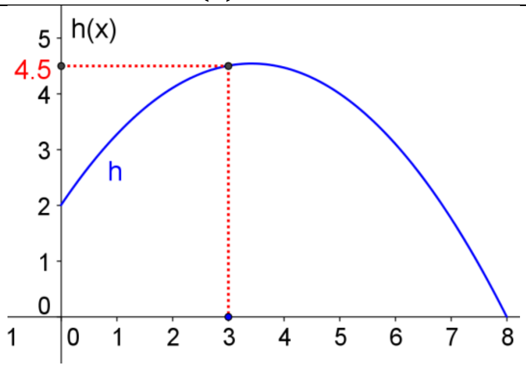
7. Ableitungsfunktion (für momentane Steigung), Differenzenquotient (für mittlere Steigung), Stammfunktion (für Flächen) sowie den Zusammenhang s-v-a im Sachzusammenhang anwenden können.

---

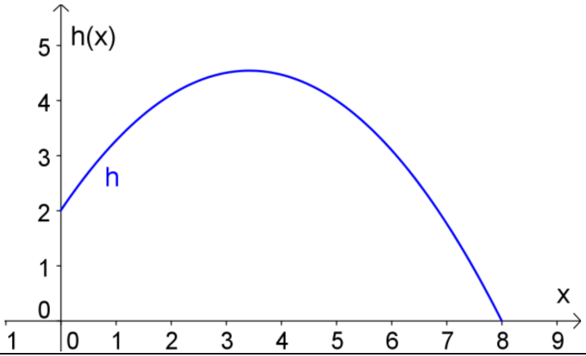
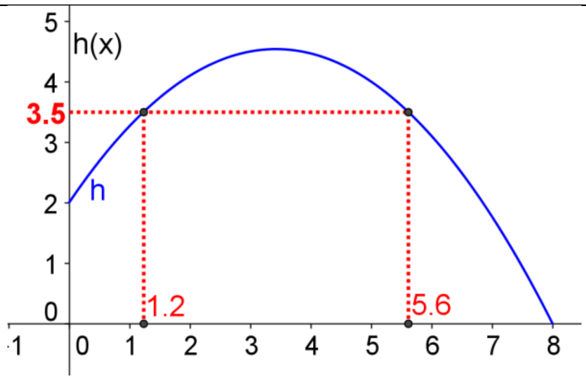
[1] Hierzu gehört beispielsweise auch die Berechnung der Halbwertszeit/Verdoppelungszeit oder die Berechnung der Nullstellen.
[2] Punkte bestimmen und in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen -> Gleichungssystem aufstellen -> Gleichungssystem ösen. Bei linearen Funktionen gilt noch: k=$\frac{HU}{LU}$
[3] Zum Beispiel den Wert von k in y=kx+d in einem bestimmten Zusammenhang interpretieren können.

Beispiel mit einer quadratischen Funktion

Beispiel für 1: Die Funktion $h(x) = -0.22\,x^2 \;+\; 1.48\,x \;+\; 2$ gibt die Höhe eines geworfenen Balles nach x m Wurfweite an.

Angabe	**Lösung**
1a) Berechnen Sie die Höhe des Balles nach 3m Wurfweite	Man setzt für x=3 ein $h(3) = -0.22 \cdot 3^2 \;+\; 1.48 \cdot 3 \;+\; 2$ $h(3) = 4.5m$ Höhe
1b) Lesen Sie aus dem unteren Graphen die Höhe des Balles nach 3m Wurfweite ab. 	 Die Höhe beträgt 4.5m

Beispiel für 2: Die Funktion $h(x) = -0.22\,x^2 \;+\; 1.48\,x \;+\; 2$ gibt die Höhe eines geworfenen Balles nach x m Wurfweite an.

Angabe	**Lösung**
2a) Berechnen Sie, wann der Ball eine Höhe von 3.5m erreicht hat.	Man setzt für h(x)=3.5 ein: $3.5 = -0.22 \cdot x^2 \;+\; 1.48 \cdot x \;+\; 2 \quad \vert -3.5$ $0 = -0.22 \cdot x^2 \;+\; 1.48 \cdot x - 1.5$ Große Lösungsformel oder Quadkom/CAS: $x_1 = 1.23$ und $x_2 = 5.61$ Bei 1.2 und 5.6 m hat der Ball eine Höhe von 3.5m
2b) Lesen Sie aus dem unteren Graphen ab, wann der Ball eine Höhe von 3m hat. 	 Bei 1.2 und 5.6 m hat der Ball eine Höhe von 3.5m

Beispiel für 3: Der Wurf eines Balls kann durch eine quadratische Funktion der Form

$$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

wobei h(x) die Höhe (in m) nach x Meter Wurfweite angibt.

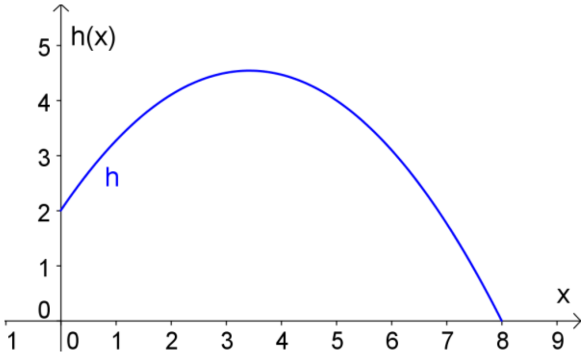
<table>
<tr><th>Wie könnte die Aufgabe gestellt sein</th><th>Lösung (für alle gleich)</th></tr>
<tr><td>1a) Der Stein wird ab einer Höhe von 2m abgeworfen, hat nach 5m eine Höhe von 4m und landet nach 8 m am Boden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.</td>
<td rowspan="3">Aus der Angabe können die folgenden Punkte herausgelesen werden:
(x|h(x))
(0| 2)
(5| 4)
(8| 0)

Diese werden nun in die Funktionsgleichung eingesetzt:
$I: a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2$
$II: a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 4$
$III: a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 0$

Dieses Gleichungssystem löst man nun mit dem Matrixverfahren (oder GeoGebra):

Matrix:
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 25 & 5 & 1 & 4 \\ 64 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Lösungsmatrix:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.22 \\ 0 & 1 & 0 & 1.48 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a=-0.22; b=1.48 und c=2

Lösung: Die Funktionsgleichung lautet:
$\underline{h(x) = -0.22\,x^2 + 1.48\,x + 2}$</td></tr>
<tr><td>1b) Der folgende Graph beschreibt den Flug des Steines.


Lesen Sie daraus drei beliebige Punkte heraus und bestimmen Sie die Funktionsgleichung.</td></tr>
<tr><td>1c) In der folgenden Tabelle sind zu drei verschiedenen Stellen die jeweiligen Höhen angegeben:
<table><tr><td>Weite x</td><td>0</td><td>5</td><td>8</td></tr><tr><td>Höhe h</td><td>2</td><td>4</td><td>0</td></tr></table>
Bestimmen Sie damit die Funktionsgleichung.</td></tr>
</table>

10 Aufgaben zum Üben mit Funktionen

1) Ein Tennisball wird bei einer Höhe von 2,5 m abgeschlagen und landet nach 12 m am Boden.

Bestimmen Sie die Gleichung jener linearen Funktion h, die die Ballhöhe in Abhängigkeit der Flugweite x angibt.

h und x in Meter

1) $h(x) = -0.21x + 2.5$

2) Die Flughöhe h eines Tennisballes in Abhängigkeit der Flugweite x kann mithilfe der Funktion

$$h(x) = -0.25x + 2{,}8$$

angegeben werden.

Das Netz liegt 4 m vor dem Aufschlagspunkt und hat eine Höhe von 90 cm. Überprüfen Sie, ob der Ball über das Netz fliegt. (h und x in Meter)

2) h(7.2)=1 m -> der Ball geht gerade noch über das Netz.

3) Die Flughöhe h eines Tennisballes in Abhängigkeit der Flugweite x kann mithilfe der Funktion

$$h(x) = -0.25x + 2{,}8$$

angegeben werden.

Interpretiere den Wert der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang. (h und x in Meter)

3) Der Ball verliert 0.25 m an Höhe für jeden Meter, den er horizontal zurücklegt.

4) Die Flughöhe h eines Tennisballes in Abhängigkeit der Flugweite x kann mithilfe der Funktion

$$h(x) = -0.25x + 2{,}8$$

angegeben werden.

Interpretiere den Wert 2,8 im gegebenen Sachzusammenhang. (h und x in Meter)

4) Der Ball wird auf einer Höhe von 2.8 m abgeschlagen.

5) Die Flughöhe h eines Tennisballes in Abhängigkeit der Flugweite x kann mithilfe der quadratischen Funktion h mit

$$h(x) = -0.01\,x^2 - 0.15x + 2.5$$

angegeben werden.

Bestimmen Sie den Aufprallwinkel des Balles am Boden.

5) α =19,29°

6) Die Flughöhe h eines Tennisballes in Abhängigkeit der Flugweite x kann mithilfe der quadratischen Funktion h mit

$$h(x) = -0.01\,x^2 \;-\; 0.15x \;+\; 2.5$$

angegeben werden.

Bestimmen Sie, wie weit das 1 m hohe Netz vom Abschlagspunkt entfernt liegen darf, damit der Ball gerade noch darüber fliegt.

6) 6,86m

7) Die Flughöhe h eines Tennisballes in Abhängigkeit der Flugweite x kann mithilfe der quadratischen Funktion h mit

$$h(x) = -0.01\,x^2 \;-\; 0.15x \;+\; 2.5$$

angegeben werden.

Mit welcher Höhe fliegt der Ball über das Netz, wenn dieses 4 m vor dem Aufprallpunkt liegt?

7) 1.24 m

8) Die Flughöhe h eines Tennisballes in Abhängigkeit der Flugweite x kann mithilfe der quadratischen Funktion h mit

$$h(x) = -0.01\,x^2 \;-\; 0.15x \;+\; 2.5$$

angegeben werden.

Mit welcher Höhe fliegt der Ball über das Netz, wenn dieses 5 m vom Abschlagspunkt entfernt liegt?

8) 1.5 m

9) Die Flughöhe h eines Tennisballes in Abhängigkeit der Flugweite x kann mithilfe einer quadratischen Funktion h beschrieben werden.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von h, wenn folgende Informationen gegeben sind:

- Abschlagspunkt bei einer Höhe von 2.8 m
- Aufprall nach 12 m
- Aufprallwinkel -15,15°

Runden Sie dabei die Koeffizienten auf 3 Dezimalstellen.

9) $h(x) = -0.003x^2 - 0.196x + 2.8$

10) Die Flughöhe h eines Tennisballes in Abhängigkeit der Flugweite x kann mithilfe der quadratischen Funktion h mit

$$h(x) = -0.01\,x^2 \;-\; 0.15x \;+\; 2.5$$

Zeigen Sie mithilfe der Differentialrechnung, dass die Funktion h zwischen Abschlag und Aufprall keinen Extremwert annimmt.

10) $h'(x) = -0.02x - 0.15 = 0 \rightarrow x = \frac{0.15}{-0.02} = -7.5$ -> kein Extremum im Definitionsbereich [0;10]

Lösungen samt Lösungsskizzen

1) $h(x) = -0.21x + 2.5$

Lösungsmöglichkeiten: k=HU/LU oder Gleichungssystem oder Regression oder GG: Gerade-Befehl

2) h(7.2)=1 m -> der Ball geht gerade noch über das Netz.

Lösungsskizze: Aufschlagspunkt bestimmen, 4 m zurückgehen und die Höhe hier berechnen

3) Der Ball verliert 0.25 m an Höhe für jeden Meter, den er horizontal zurücklegt.

Lösungshilfe: Skizze machen und Steigungsdreieck einzeichnen. Wichtig ist, dass der Wert 0.25 vorkommt

5) α =19,29°

Lösungsskizze: Aufprall bestimmen, Steigung an diesem Punkt und Anschließend Formel für den Steigungswinkel

6) 6,86m

Lösungsweg: h(x)=1 -> x=…

7) 1.24 m

Lösungsweg: Aufprallspunkt berechnen -> 10-4=6 m -> h(6)=…

8) h(5)=1.5 m

9) Lösung: $h(x) = -0.003x^2 - 0.196x + 2.8$

Lösungsskizze: Gleichungssystem aufstellen mit h(0)=2,8 ; h(12)=0 und h'(12)=tan(-15.15°)

10) $h'(x) = -0.02x - 0.15 = 0 \rightarrow x = \frac{0.15}{-0.02} = -7.5$

Da die Funktion nur im positiven Bereich zwischen Abschlag (0m) und Aufprall (10m) definiert ist, gibt es in diesem Bereich kein Extremum.