Exponentielles Wachstum und Zerfall

(© S. Riedmann)

Aufgabe (1)

Ein Wald hatte 1990 einen Bestand von 33.000 m³ Holz. Im Laufe von 20 Jahren wurde kein Holz gefällt, so dass sich der Bestand von 1970 um 70% vermehren konnte.

a) Stellen Sie für diesen Waldbestand das Wachstumsgesetz auf, wenn exponentielles Wachstum vorausgesetzt wird:

Lösung: $N(t) = N_0 \cdot a^t$ Wenn wir für das Jahr 1970 die Zeit t=0 setzen, dann ist 1990 das t=20.

Somit können wir aus dem Text folgendes herauslesen:

Für $t = 20$ ist $N(20) = 33000$ und zusätzlich gilt:

$N_0 + 70\%\ von\ N_0 = N(20)$. (von 1970 auf 1990 ist der Waldbestand um 70% gestiegen) D.h.:

$$N_0 + 0.7 \cdot N_0 = 33000 \quad |\ N_0\ links\ herausheben$$

$$N_0 \cdot (1 + 0.7) = 33000 \quad |: 1.7$$

$$N_0 = \frac{33000}{1.7} = 19411.76$$

Somit war der Bestand 1970 bei 19411.76m³. Nun müssen wir noch das a bestimmen. Hierzu setzen wir alles, was wir wissen in die Formel $N(t) = N_0 \cdot a^t$ ein:

$$33000 = 19411.76 \cdot a^{20}$$

$$a = 1.0269$$

Das Wachstumsgesetz lautet somit: $N(t) = 19411.76 \cdot 1.0269^t$

Hinweis: Wer will, kann auch die e^{λ}-Formel verwenden. Die Rechenschritte für N_0 bleiben hier aber gleich. Man erhält dann: $N(t) = 19411.76 \cdot e^{0.0265 \cdot t}$

b) Wie groß war der Bestand 1980 und wie groß würde er im Jahr 2000 sein?

Lösung: Wir setzen in das Wachstumsgesetz aus a) $N(t) = 19411.76 \cdot 1.0269^t$ für t=10, um die Größe 1980 zu erahlten (wir zählen ja erst ab 1970).

$$N(10) = 19411.76 \cdot 1.0269^{10}$$

$N(10) = 25313.17$m³ im Jahr 1980.

Genauso für 2000 (t=30):

$N(10) = 19411.76 \cdot 1.0269^{10}$=43043.69.

Hinweis: Die Abweichungen auf dem Lösungszettel beruhen auf Rundungsfehlern.

c) Wann würde sich der Holzbestand von 1970 verdreifacht haben.

Lösung: Da wir 1970 einen Bestand von 19411.76 haben, wollen wir wissen, für welches t gilt, dass N(t)=3*19411.76. Wir setzen wieder in das Wachstumsgesetz:

$$3 \cdot 19411.76 = 19411.76 \cdot 1.0269^t \quad |: 19411.76$$

$$3 = 1.0269^t \quad | \log(\quad)$$

$$\log(3) = t \cdot \log(1.0269)$$

$$t = 41.39$$

Nach etwas mehr als 41 Jahren hat sich der Bestand verdreifacht. Dies wäre also zwischen 2011 und 2012 der Fall (1970+41.39)

Aufgabe 2: Die jüngsten Statistiken ergeben bezüglich der Anzahl aller in Österreich lebenden, mit dem Aids-Virus infizierten Personen folgendes Bild:

1982……2500 Infizierte

1992……10000 Infizierte

Die Anzahl A jener Personen, welche aufgrund ihres Verhaltens oder persönlicher Umstände ein hohes Ansteckungsrisiko tragen, ist A=200‘000 Personen (=“Risikogruppe“).

a) Mit wie viel Infizierten müsste man nach t=20 bzw. 30, 50, 100 Jahren (ab 1992) rechnen, sofern man dem Anwachsen exponentielles Wachstum zugrunde legt? Für welchen Zeitpunkt kann man erwarten, dass alle zur Risikogruppe gehörenden Personen angesteckt sind?

Lösung: Zuerst berechnen wir das Wachstumsgesetz der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$

Aus dem Text lesen wir, dass $N_0 = 2500$ (wenn wir für das Jahr 1982 das t=0 setzen) und $N(10) = 10000$. Setzen wir das ein, so erhalten wir:

$$10000 = 2500 \cdot a^{10}$$

$a = 1.147$ (wer die e^{λ} –Formel verwendet erhält für λ=0.1386; Erinnerung $a = e^{\lambda}$)

Das Wachstumsgesetz lautet dann: $N(t) = 2500 \cdot 1.147^t$

Nun ist noch die Anzahl der Infizierten für t=20, 30, 50 und 100 gefragt. Da N die Anzahl angibt, heißt das, wir müssen N(20), N(30), N(50) und N(100) berechnen:

$N(20) = 2500 \cdot 1.147^{20} = 40001.15$

$N(30) = 2500 \cdot 1.147^{30} = 160006.87$

$N(50) = 2560183.31$

$N(100) = 2.621815432092\, E9 = 2.621815432092 \cdot 10^9 = 2621815432.092$

Hinweis: Wenn du etwas weniger tippen willst, könntest du das Wachstumsgesetz auch bei Y= in den TR eintippen ($y = 2500 \cdot 1.147^x$). Anschließend kannst du die Werte aus der Wertetabelle (2nd+Graph) herauslesen. Unter 2nd+Window kannst du die Anfangswerte und schrittweite der Wertetabelle einstellen.

b) Verwendet man die Formel $g(t) = \frac{A}{1+79 \cdot e^{-0.1425 \cdot t}}$ (g(t)…Anzahl der Infizierten, t anlog zu oben). Wie viele Infizierte kann man dann zu denselben Zeitpunkten erwarten?

Lösung: Aus der Angabe ganz oben wissen wir, dass A=200‘000 ist. Nun will man die Anzahlen für t=20, 30, 50 und 100 wissen. Hierzu setzen wir wie oben bei a) einfach in die Formel ein und erhalten:

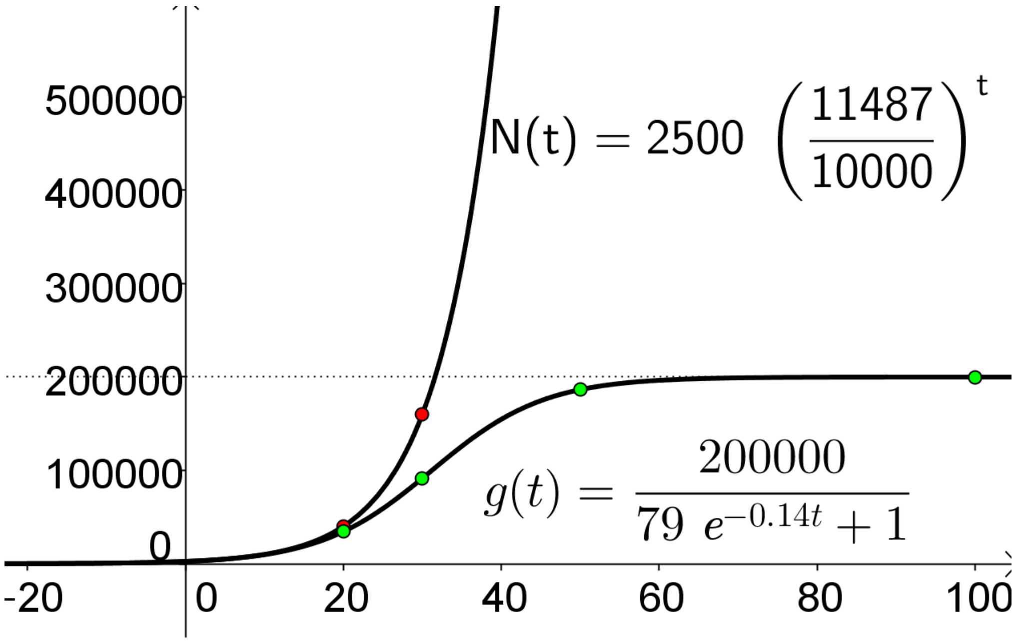
$g(20) = \frac{A}{1+79 \cdot e^{-0.1425 \cdot 20}} = 35908.57$

$g(30) = 95281.11$

$g(50) = 188045.23$

$g(100) = 199986.86$

Die folgende Graphik zeigt die beiden Funktionen aus a) und b). Wie man schön sieht, „explodiert“ die Exponentialfunktion, wohingegen die Funktion g(t) beschränkt ist und nicht höher als 200000 wird.



c) Nehmen wir an, ab dem Jahre 1992 würde die zu erwartende Anzahl der Infizierten am besten mit Hilfe folgender Funktionsgleichung beschrieben werden können:

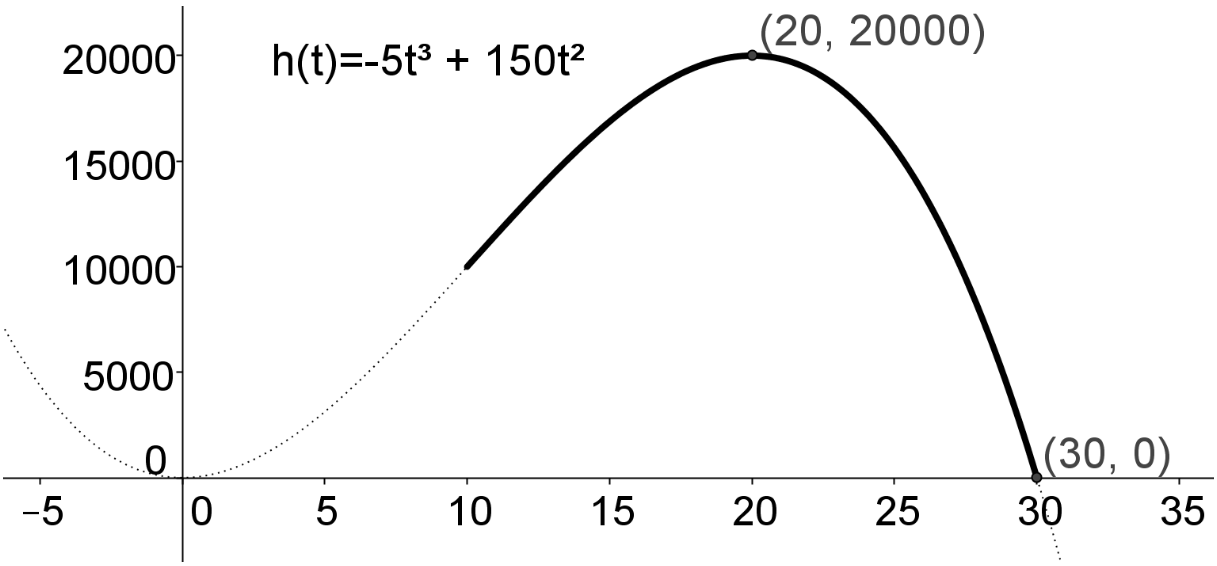
$h(t) = -5 \cdot t^3 + 150 \cdot t^2$ (h(t)…Anzahl der infizierten, $t \geq 10$)

Für welchen Zeitpunkt sind am meisten und wie viel Infizierte?

Für welchen Zeitpunkt sind keine Infizierte zu erwarten?

Lösung: Da wir hier ein Maximum berechnen müssen, zeichnen wir die Funktion bei Y=. Bei Window wissen wir aus A und B, dass y-max sicherlich um die 200000 sein muss (die Werte, die wir berechnet haben, waren ja in diesem Bereich). Bei x-max wissen wir, dass Werte, größer als 10 beachtet werden müssen.

Man erhält:



Hinweis: Nur der fett-gezeichnete Bereich des Graphen ist für uns wichtig, da nur hier $t \geq 10$ ist und die Anzahl der Infizierten positiv.

Mit den Befehlen Max und Zero (siehe unter 2nd+Calc) können die oben eingezeichneten Punkte bestimmt werden.

d) Skizziere Verlaufskurven für diese Funktionen und gib „außermathematische Interpretationen bezüglich deren Verlauf.

Verlauf: Siehe Skizzen oben.

Der Verlauf von N(t) ist nicht beschränkt und „explodiert“. Dies ist unrealistisch, da nach diesem Modell die Anzahl der Infizierten unbeschränkt wächst.

Der Verlauf von g(t) ist wächst zuerst ähnlich wie das exponentielle Wachstum. Ab einem bestimmten Punkt wird das Wachstum aber kleiner und schließlich nähert sich der Verlauf einem Maximum von 200 000 Infizierten.

Der Verlauf von h(t) sinkt nach dem Maximum. Nach t=30 ist die Anzahl der Infizierten gleich 0. D.h. die Krankheit wäre nach diesem Modell ausgestorben.

Aufgabe (3)

Die Halbwertszeit von Cäsium ^{137}CS beträgt 29.7 Jahre.

a) Wann ist die beim Reaktorunfall von Tschernobyl verursachte Cäsiumbelastung auf 10% ihres Anfangswertes zurückgegangen?

Lösung: $N(t) = N_0 \cdot a^t$

Zuerst stellen wir mithilfe der Halbwertszeit das Wachstumsgesetz auf: Es gilt: $N(29.7) = \frac{N_0}{2}$

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot a^{29.7}$$

$$\rightarrow a = 0.976 \rightarrow \text{Pro Jahr zerfallen 12.4\%}$$

Das Wachstumsgesetz lautet also: $N(t) = N_0 \cdot 0.976^t$

Gefragt ist nun, für welches t gilt, dass $N(t) = 10\%$ von N_0

D.h. wann ist $N(t) = 0.1 \cdot N_0$. Wir setzen ein:

$$0.1 \cdot N_0 = N_0 \cdot 0.976^t \;|: N_0$$

$$0.1 = 0.976^t \;\; |\log(\quad))$$

$$\log(0.1) = t \cdot 0.976^t$$

$$t = 94.79$$

Nach ca. 95 Jahren sind nur mehr 10% der Anfangsmenge vorhanden. (Der Unterschied in der anderen Lösung liegt wieder bei einem Rundungsfehler).

b) Auf wie viel Prozent ist die Belastung seit dem Reaktorunfall 1985 bis heute (12 Jahre später) zurückgegangen?

Lösung: Wir setzen in das Zerfallsgesetz : $N(t) = N_0 \cdot 0.976^t$ für t=12 ein:

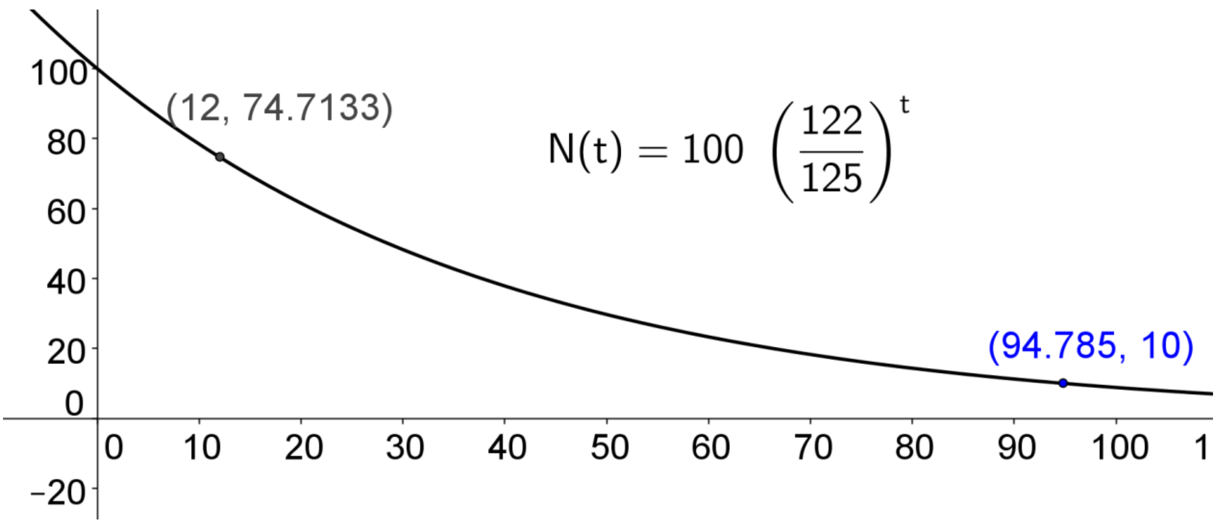
$$N(12) = N_0 \cdot 0.976^{12} = N_0 \cdot 0.75$$

Somit sind nach 12 Jahren nur noch 75% von der Anfangsmenge N_0 vorhanden.

c) Veranschaulichen Sie die Zerfallskurve graphisch für die ersten 100 Jahre.

Lösung: Setzen wir für N_0 einen (beliebigen) Anfangswert ein (am besten 100 für 100% am Anfang), so können wir die Funktion bei y= eintippen:

$$y = 100 \cdot 0.976^x$$



In der Graphik siehst du zusätzlich noch die bei a) und b) berechneten Werte.

Aufgabe (4)

Nach Schätzungen aus dem Jahr 1994 beliefen sich die Reserven des Rohstoffes Nickel auf 51 Millionen Tonnen.

Der Verbrauch betrug 1994 0.8 Millionen Tonnen. Außerdem wird die jährliche Zuwachsrate des Verbrauchs auf 2.9% geschätzt.

a) Erstelle das Gesetz für den Nickelverbrauch und gib die Wachstumskonstante λ an.

Lösung: Da jährlich 2.9% hinzukommen, ist $a = 1.029$ (Achtung auf die 0!!).

Nun berechnen wir λ: Es gilt

$$a = e^{\lambda}$$

$$1.029 = e^{\lambda} \quad |\ln(\,)$$

$$\ln(1.029) = \lambda \cdot \ln(e) \quad |\ln(e) = 1$$

$$\ln(1.029) = \lambda$$

$$\lambda = 0.0286$$

Das Gesetz für den Nickelverbrauch lautet dann:

$$N(t) = N_0 \cdot 1.029^t$$

$$bzw.$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{0.0286 \cdot t}$$

b) In wie viel Jahren wird sich der jährliche Verbrauch verdoppelt haben?

Lösung: Gefragt ist, wann ist $N(t) = 2 \cdot N_0$

$$2 \cdot N_0 = N_0 \cdot 1.029^t \quad |: N_0$$

$$2 = 1.029^t \quad |\log(\,)$$

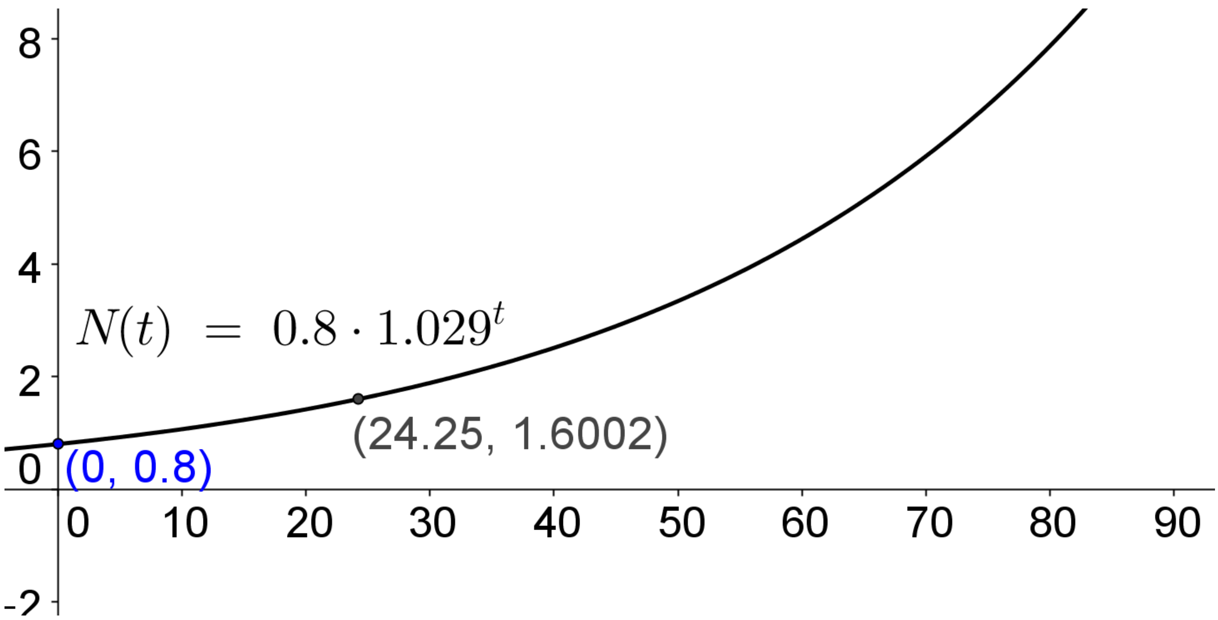
$$t = \frac{\log 2}{\log 1.029} = 24.25$$

Nach etwas weniger als 25 Jahren hat sich die Anfangsmenge verdoppelt. Die Halbwertszeit beträgt also etwas weniger als 25 Jahre.

c) Stelle den verbliebenen Nickelvorrat in einem geeigneten Koordinatensystem graphisch dar.

Laut der Angabe oben ist $N_0 = 0.8$ Mio Tonen.

Somit zeichnen wir die Funktion: $N(t) = 0.8 \cdot 1.029^t$ (im Tr: $y = 0.8 \cdot 1.029^x$)



d) Wann ist der gesamte Nickelvorrat aufgebraucht?

Lösung: Zu berechnen ist, wann N(t)=51 Mio Tonnen.

$$51 = 0.8 \cdot 1.029^t \quad |: 0.8 \; dann \; |log$$

$$t = 145.34$$

nach 145.34 Jahren, also erst im Jahr 2139 (1994+145) sind die Nickelvorräte verbraucht.

Aufgabe (5)

Mittels der ${}^{14}C$-Methode ist es möglich, das Alter von Fossilien und Lebewesen zu bestimmen. Dieses Isotop zerfällt mit einer Halbwertszeit von etwa 5730 Jahren.

a) Bei Ötzi, dem Mann vom Hauslabjoch, wurde damit ein Alter von etwa 5000 Jahren festgestellt. Welcher ${}^{14}C$-Anteil (in %) wurde daher gemessen?

Lösung: Als Ötzi starb, hatte er 100% der ${}^{14}C$-Isotope. Somit setzen wir $N_0 = 100\%$. Nun berechnen wir a:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot a^{5730} \quad |: N_0$$

$$\frac{1}{2} = a^{5730} \quad | \,\hat{}\,(\frac{1}{5730})$$

$$a = 0.999879$$

Somit lautet das Zerfallsgesetz: $N(t) = 100 \cdot 0.999879^t$

Nun berechnen wir, wie viel nach 5000 Jahren (=Alter von Ötzi) noch da ist:

$$N(5000) = 100 \cdot 0.999879^{5000} = 0.546$$

Folglich sind nach 5000 Jahre immerhin noch 54.6% vorhanden. Hier erkennen wir übrigens auch, warum die ${}^{14}C$-Methode nur für sehr alte Objekte geeignet ist. Die Isotope zerfallen sehr langsam.

b) Bis zu welchem Alter lässt sich diese Methode verwenden, wenn man noch 1% des ursprünglichen Gehaltes mit hinreichender Genauigkeit feststellen kann?

N(t)=1% von N_0, gesucht ist das t: Wir setzen wieder ein:

$$0.01 \cdot N_0 = N_0 \cdot 0.999879^t \ \ |: N_0$$

$$0.01 = 0.999879^t \ \ | \log(\,) \ldots$$

$$t = 38056.955$$

Nach 38‘056 Jahren sind noch 1% der ursprünglichen Menge da.

Aufgabe (6)

Infolge der chemischen Schädlingsbekämpfung mittels DDT (Dichlordiphenyltrichlorethan) ist dieses Gift über die Nahrungskette auch in die Kuhmilch gelangt. Eine Konzentration von 0.05 ppm (parts per million = 10^{-4} %) wird zwar noch toleriert, jedoch ist es wünschenswert, diese Toleranzgrenze auf 0.02 ppm zu senken. Das kann nicht von heute auf morgen geschehen. Erst in etwa 30 Jahren hat sich die Hälfte des vorhandenen Giftstoffes chemisch zersetzt. Wie lange dauert es voraussichtlich, bis die angestrebte Grenze von 0.02 ppm erreicht wird, wenn ab jetzt kein DDT mehr verwendet wird und 0.05 ppm vorhanden sind?

Bemerkung: DDT wird im Fettkörper des menschlichen Organismus gespeichert. Bei dessen Abbau (Gewichtsverlust) können die Blutwerte von DDT gefährlich hoch werden.

Lösung: Aus dem Text lesen wir, dass die Halbwertszeit bei 30 Jahren liegt.

Somit gilt:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot a^{30}$$

$$a = \ \ 0.977$$

Somit lautet das Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot 0.977^t$. Nun wollen wir wissen, wann (=für welches t) das N(t) nur noch 0.02 ist, wenn zu Beginn N_0 =0.05 vorhanden sind:

$$0.02 = 0.05 \cdot 0.977^t$$

$$t = 39.38$$

Es dauert also fast 40 Jahre, bis nur mehr 0.02 ppm DDT vorhanden sind.