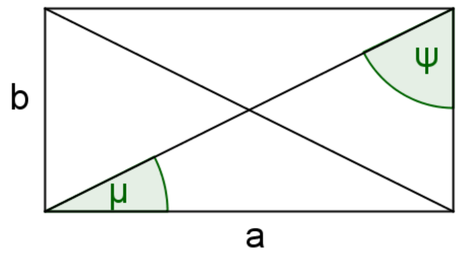
# Aufgaben zu den Themen:
# „Rechtwinkliges Dreieck“ und
# „Sinus, Cosinus und Tangens im Einheitskreis“

1. Eine Rampe hat eine Steigung von 5%. Wie groß ist der Steigungswinkel?

2. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$, $\alpha = 30°$ und a=5cm.
a) Fertige eine Skizze des Dreiecks an.
b) Berechne den Winkel $\beta$.
c) Berechne die fehlenden Seiten b und $c$.
d) Bestimme den Flächeninhalt.

3. Trigonometrie: Ein Hochhaus wirft bei einer Sonnenhöhe von 65° einen 100m langen Schatten. Wie groß ist das Hochhaus. Fertige zuerst eine Skizze an.

4. Trigonometrie: Gegeben sei ein Rechteck (siehe Abbildung) mit: A=12cm², $\mu$=36,87° $(\mu = "M\ddot{u}")$
Berechne: a, b und den Winkel ψ $(\psi = "\mathrm{Psi}")$




5. Quadratische Gleichungen: Tennisball
Die Wurfhöhe eines Tennisballes kann näherungsweise durch die Funktion:
$s(x) = s_0 - 4{,}9\, x^2/v^2$ beschrieben werden, wobei x die waagrechte Entfernung von der Abwurfstelle in Meter bedeutet, v die Abschlaggeschwindigkeit des Balls ist und $s_0$ die Abschlaghöhe = Schulterhöhe des Spielers + Unterarmlänge + Tennisschläger. Sie wird angenommen mit $s_0 \approx 200$ cm.

a) Setze v=25,3 m/s. Fertige mit GeoGebra eine Skizze der Funktion s(x) an.
b) **Berechne** für v=25,3 m/s, wann der Tennisball das erste Mal den Boden berührt.
c) Wie groß ist die Abschlaggeschwindigkeit des Balls, wenn er nach 120 Metern den Boden das erste Mal berührt?

6. Trigonometrie: Ein Extremsportler plant mittels einer Slackline (siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Slackline) von einem Hochhaus zu einem anderen zu gelangen. Hochhaus A ist 380m, Hochhaus B ist 390m hoch. Die waagrechte Entfernung der beiden Häuser beträgt 50m. Zum Festbinden des Seils benötigt man auf beiden Enden ca. 3m.

a) Aus Erfahrung weiß der Extremsportler, dass die Steigung des Seils im Durchschnitt höchstens 20% betragen darf, damit ein „sicheres“ Überqueren möglich ist. Stelle fest, ob sich die beiden Hochhäuser für das Abenteuer eignen.
b) Stelle eine Formel auf, um die prozentuale Steigung in den Neigungswinkel umzurechnen.
c) Gib die Mindestlänge der Slackline an. Ist diese Länge realistisch?

7.Trigonometrie: Sinus und Kosinus im Einheitskreis
a)  Argumentiere mithilfe der Abbildung „Sinus und Kosinus im Einheitskreis“ (siehe Expertenpuzzle), warum sin 90°=1 und cos 90° =0.
b) Bei welchem Winkel ist der Kosinus gleich groß wie der Sinus (d.h. wie groß ist $\alpha$, wenn $\sin\alpha = \cos\alpha$)
c) Welchem Gradmaß entspricht eine Bogenlänge von $\pi$? (D.h.: wandle die Bogenlänge $\pi$ in Grad um)

**Lösungen**

**Aufgabe 1:**

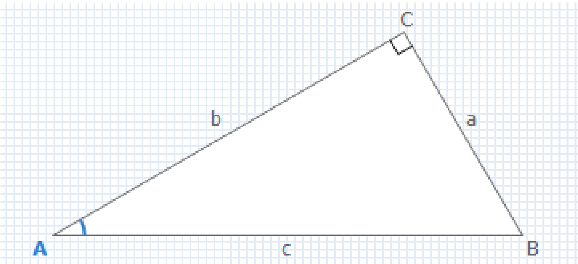
k=5%=$\frac{5}{100}$ =0.05

$$k = \tan \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} 0.05$$

$$\alpha = 2.86°$$

**Aufgabe 2**



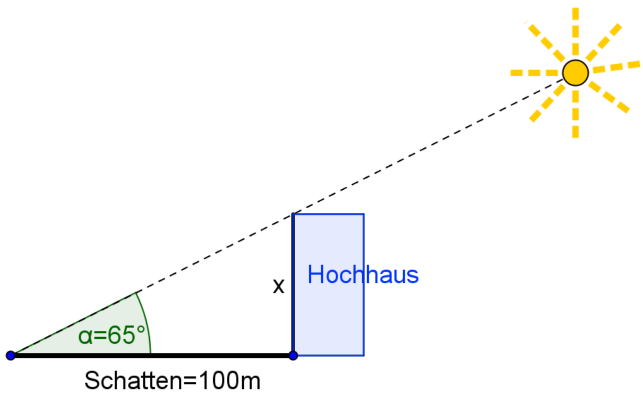

$\beta = 180 - 90 - 30 = 60°$

$c: sin\ \alpha = \frac{GK}{H} = \frac{a}{c}$
$sin\ 30° = \frac{5}{c}\ \ |\cdot c$
$c \cdot sin\ 30° = 5\ \ |: sin\ 30°$
$c = \frac{5}{sin\ 30°} = 10$ cm

b kann mithilfe des Satzes von Pythagoras, oder mit $cos\ \alpha = \frac{b}{c}$ oder.... Berechnet werden!
$b = 8.66$ cm

A: $A = \frac{a \cdot b}{2} = 21.65$ cm²

**Aufgabe 3**




Wie aus der Abbildung leicht zu sehen ist, ist x die Gegenkathete des Winkels und der Schatten die Ankathete. Somit gilt:

$$\tan 65° = \frac{x}{100}$$
$$x = 100 \cdot \tan 65°$$
$$\underline{x = 214.45m}$$

Das Hochhaus hat somit eine Höhe von knapp über 214m.

**Aufgabe 4**: Es gilt:

$A = a \cdot b \rightarrow \quad \underline{12 = a \cdot b}$

Und

$tan\ \mu = \frac{b}{a}$ (Warum nehme ich hier den Tangens? Antwort: in der obigen Formel kommen auch a und b vor, beide sind unbekannt. Aus diesem Grund suche ich mir eine zweite Formel, in der a und b vorkommen -> und dies ist eben beim Tangens der Fall)

$$tan\ 36{,}87° = \frac{b}{a}$$

0.75=$\frac{b}{a} \rightarrow \quad \color{red}{a = \frac{b}{0.75}}$

------------

Nun setzen wir die rote Gleichung in die obere unterstrichene und erhalten:

12=$\color{red}{a} \cdot b = \left(\color{red}{\frac{b}{0.75}}\right) b = \frac{b^2}{0.75}$

$$12 = \frac{b^2}{0.75}$$
$$9 = b^2$$
$$\pm 3 = b$$

Da b eine positive Zahl sein muss (b ist eine Länge), kommt nur +3 infrage. D.h. $\underline{\underline{b=3}}$

Nun berechnen wir noch a:

12= $a \cdot b \rightarrow 12 = a \cdot 3 \rightarrow \underline{\underline{a = 4}}$

Zuletzt noch den Winkel ψ:

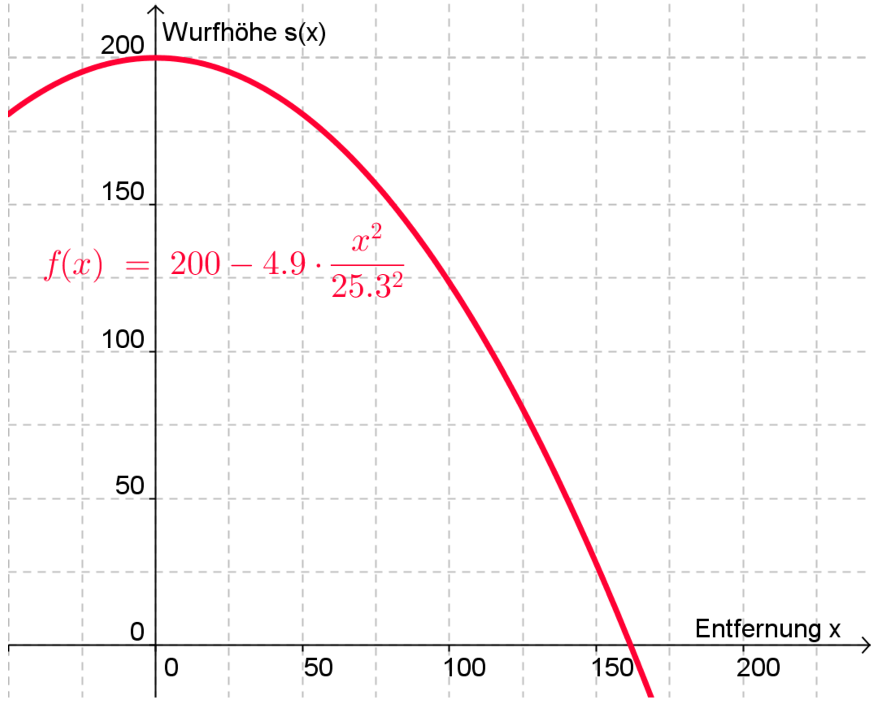
Hier sehen wir leicht, dass ψ und $\mu$ in einem rechtwinkligen Dreieck liegen. Damit gilt, dass

ψ + $\mu$ + 90° = 180°

ψ = 90°- $\mu$

$\underline{\underline{\psi = 53.13°}}$

**Aufgabe 5**




Zusatzbemerkung: Der sinnvolle Definitionsbereich dieser Funktion ist D=[0,t], wobei t die rechte Nullstelle des Graphen ist. In der Realität würde er ja beim Aufprall am Boden wieder aufspringen.

b) Der Tennisball berührt den Boden, wenn s(x)=0 ist. D.h. wir müssen die Gleichung
$0 = s_0 - 4{,}9\, x^2/v$
lösen, wobei v=25,3 und $s_0$ = 200 ist.

$0 = 200 - 4{,}9 \frac{x^2}{25{,}3^2}$ Wenn wir dies etwas anders anschreiben:

$0 = -\frac{4{,}9}{25{,}3^2} x^2 + 0x + 200$

können wir nun bereits in die große Lösungsformel einsetzen mit a=$-\frac{4{,}9}{25{,}3^2} = 0.007655$; b=0 und c=200.

Da das b=0 ist, können wir die Gleichung aber auch ohne Lösungsformel lösen:

$0 = -\frac{4{,}9}{25{,}3^2} x^2 + 0x + 200 \qquad |+\frac{4{,}9}{25{,}3^2} x^2$

$\frac{4{,}9}{25{,}3^2} x^2 = 200 \qquad | : \frac{4{,}9}{25{,}3^2}$

$x^2 = 26126.12245$

$\underline{x = 161.64\, m}$

Der Ball erreicht somit nach ca. 161.64m den Boden. Dieses Ergebnis scheint auch mit der oberen Graphik übereinzustimmen.

c) Hier ist nun die Abschlaggeschwindigkeit v gefragt. Dafür wissen wir, dass bei x=120 ist und die Wurfhöhe s(x)=0 ist.
d.h.: s(120)=0
Dies setzen wir nun in unsere Gleichung ein: für x=120 und für s(x)=0 und erhalten:
$s(x) = 200 - 4{,}9\, x^2/v^2$

$0=200-4{,}9 \cdot \frac{120^2}{v^2}$ (nun müssen wir noch v berechnen)

$0=200-4{,}9 \cdot \frac{120^2}{v^2} \qquad |+4{,}9 \cdot \frac{120^2}{v^2}$

$4{,}9 \cdot \frac{120^2}{v^2} = 200 \qquad |\cdot v^2$

$4{,}9 \cdot 120^2 = 200 \cdot v^2 \qquad |:200$

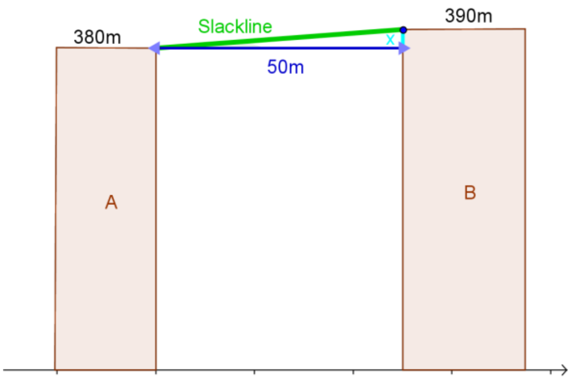
$$\frac{4{,}9 \cdot 120^2}{200} = v^2 \qquad |\sqrt{\phantom{x}}$$

$$\pm\sqrt{352.8} = v$$

$$\pm 18.78 = v$$

Da v nur positiv sein kann, ist v=+18.78
Antwort: Der Ball hat eine Anfangsgeschwindigkeit von 18.78 m/s.

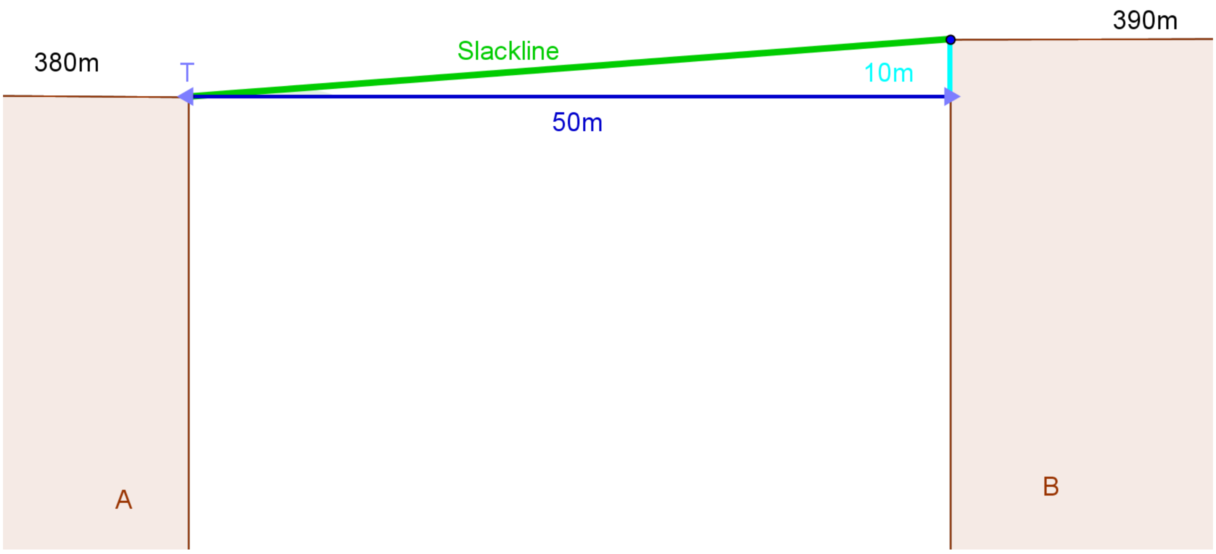
**Aufgabe 6**




a) Die Steigung ist definiert als: $\frac{Höhenunterschied}{Längenunterschied}$.
Der Höhenunterschied der beiden Häuser beträgt 10m. Der Längenunterschied 50m. Somit erhalten wir die prozentuelle Steigung:

$$\frac{Höhenunterschied}{Längenunterschied} = \frac{10}{50} = 0.2 = 20\%$$

Die Steigung beträgt genau 20%. Somit geht es sich haarscharf aus.




b) Die Steigung ($\frac{Höhenunterschied}{Längenunterschied}$) ist das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete vom Winkel bei Punkt T (siehe große Abbildung). Nennen wir diesen Winkel $\alpha$, dann gilt:

$$\tan\alpha = \frac{Höhenunterschied}{Längenunterschied} \qquad |\tan^{-1}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Höhenunterschied}{Längenunterschied}\right)$$

Dies ist die allgemeine Formel. In unserem Fall ist der Höhenunterschied 10m, der Längenunterscheid 50m. Somit gilt:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{10}{50}\right) = 11.31°$$

Der Steigungswinkel beträgt somit 11.31°.

c) Für die Mindestlänge des Seils müssen wir die obige Hypetenuse (grüne Strecke = Slackline) berechnen. Dies können wir entweder mithilfe des Satzes von Pythagoras, oder mit einer der Winkelfunktionen. Ich habe mich „spontan“ für den Sinus entschieden und erhalte:

$$sin\alpha = \frac{GK}{H} = \frac{10}{Slackline}$$

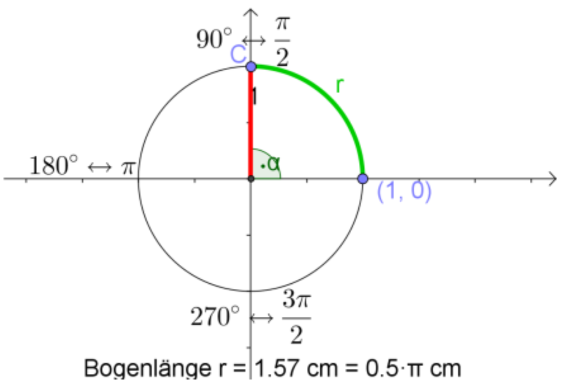
$$Slackline = \frac{10}{sin\alpha}$$

Da $\alpha$=11.31° erhalten wir:
Slackeline=50.99m.
Zusätzlich müssen wir nun an beiden Enden noch 3 Meter hinzufügen (d.h. insgesamt 6m). D.h. Die Slackline muss eine Mindestlänge von 51+6=57m haben.

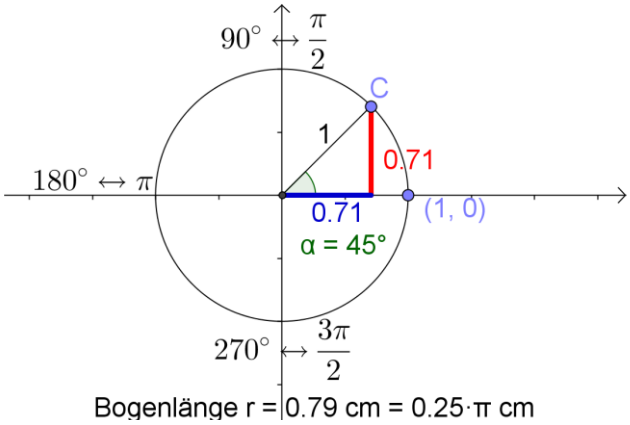
Dieser Wert ist natürlich nicht sehr realistisch. Wäre die Slackline nämlich wirklich nur 51m lang, so wäre sie ganz fest gespannt.
Die Folge ist, dass sie dadurch auch sehr schnell in Vibration gerät, was dazu führt, dass unser Extremsportler mit großer Wahrscheinlichkeit nicht auf der anderen Seite heil ankommt.
Aus diesem Grund lässt man das Seil immer etwas locker. Dadurch ist es „ruhiger“ und einfacher zu überqueren.

**Aufgabe 7**
6a) Im Folgenden Argumentiere ich mithilfe des Arbeisblattes zum Sinus, Cosinus und Tangens (siehe [http://www.geogebratube.org/student/m133494](http://www.geogebratube.org/student/m133494) ).

Wenn der Winkel 90° beträgt, ist der Punkt C ganz oben bei (0,1). Wie wir vom Expertenpuzzle wissen ist die x-Koordinate des Punktes der Kosinus-wert (und somit $\cos\alpha = 0$) und die y-Koordinate des Punktes der Sinus-wert (und somit $\sin\alpha = 0$). (Siehe Graphik)




b) $\cos\alpha = \sin\alpha$ bei $\alpha = 45°$. Begründung: Bei einem Winkel von 45° gehe ich genau so viel nach rechts wie hinauf. Somit ist die x-Koordinate und die y-Koordinate des Punktes C ident. Und das heißt wiederum, dass $\cos\alpha = \sin\alpha$




c) Hier reicht ein kurzer Blick auf die Graphik. $\pi$ ist die Länge eines Halbkreises. Und ein Halbkreis hat einen Winkel von 180°. Somit entspricht $\pi$ einem Winkel von 180°.

Wer unbedingt will (er muss NICHT) kann hier auch wieder eine Schlussrechnung machen:

$2\,\pi$ - 360°

$\pi$ - x°

Somit ergibt sich $x = \frac{360 \cdot \pi}{2\pi} = 180°$